

Κεφάλαιο 22ο

Σύγκριση – Διάταξη κλασμάτων



Πώς θα μπορούμε στη σειρά;

Συγκρίνω ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα.
Διατάσσω τα κλάσματα κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.
Τοποθετώ τα κλάσματα στην αριθμογραμμή.
Μετατρέπω ετερόνυμα κλάσματα σε ομώνυμα.



Δραστηριότητα 1η



Πέντε φίλοι παρήγγειλαν τις δύο ίδιες πίτσες που φαίνονται στο σχήμα. Η μία πίτσα (α) ήταν χωρισμένη σε 8 κομμάτια και η άλλη (β) σε 6 κομμάτια.

- Από την πρώτη πίτσα έφαγαν: ο Βασίλης, ο Γιώργος και η Μαργαρίτα τα $\frac{4}{8}$, τα $\frac{3}{8}$ και το $\frac{1}{8}$ αντίστοιχα. Να συγκρίνεις τα μερίδιά τους και να τα γράψεις κατά αύξουσα σειρά χρησιμοποιώντας το σύμβολο < ανάμεσά τους.

$$\frac{1}{8} < \frac{3}{8} < \frac{4}{8}$$

- Ο Γιώργος έφαγε τα $\frac{3}{8}$ από την πρώτη πίτσα και ο Σωτήρης τα $\frac{3}{6}$ από τη δεύτερη. Ποιος έφαγε περισσότερο;

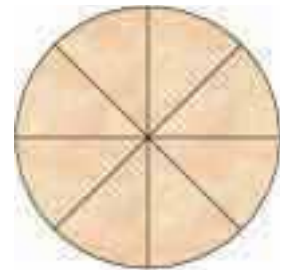
$$\frac{3}{6} > \frac{3}{8}$$

- Αν συγκρίνουμε τα μερίδια του Γιώργου, ο οποίος έφαγε τα $\frac{3}{8}$ από την πρώτη πίτσα και του Λευτέρη ο οποίος έφαγε τα $\frac{2}{6}$ από τη δεύτερη, μπορούμε εύκολα να βρούμε ποιο είναι το μεγαλύτερο;

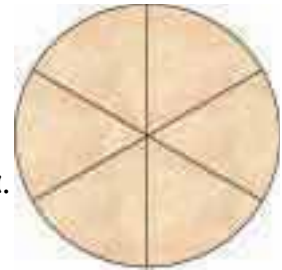
- Τι μπορούμε να κάνουμε για να τα συγκρίνουμε; **Να τα κάνουμε ομώνυμα.**

$$\text{ΕΚΠ} (6, 8) = 24, \text{ τα κλάσματα θα γίνουν } \frac{9}{24} > \frac{8}{24}$$

Ο Γιώργος έφαγε περισσότερο από το Λευτέρη.



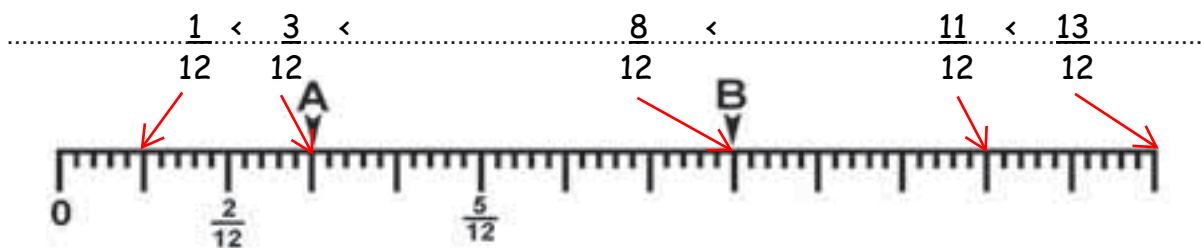
(α)



(β)

Δραστηριότητα 2η

- Αφού πρώτα διατάξεις τα κλάσματα $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{1}{12}$ και $\frac{11}{12}$ κατά αύξουσα σειρά, τοποθέτησε αυτά που αντιστοιχούν στα σημεία Α και Β στην παρακάτω αριθμογραμμή: **A : 1/12 και B : 8/12**.



- Ποια διαδικασία μας επιτρέπει να βρούμε ποιο κλάσμα παρεμβάλλεται ανάμεσα σε δύο άλλα;



Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε τα κλάσματα και να τα διατάξουμε κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.

Σύγκριση κλασμάτων

Ανάμεσα σε δύο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.

Για να **συγκρίνουμε ετερώνυμα** κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.

Ειδικά για τα ετερώνυμα κλάσματα που έχουν τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή.

Παραδείγματα

$$\frac{9}{24} > \frac{6}{24}$$

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \quad \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad \frac{8}{12} < \frac{9}{12}$$

$$\frac{2}{15} > \frac{2}{18}$$

Τα ετερώνυμα κλάσματα μπορούν να μετατραπούν σε ισοδύναμά τους ομώνυμα, αν πολλαπλασιαστούν οι όροι τους με τον κατάλληλο αριθμό.

$$\frac{3}{5}, \frac{1}{2} \text{ Ε.Κ.Π. } (5,2) = 10 \quad \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}, \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$$



Εφαρμογή 1η Συγκρίνω κλάσματα με το νου

Για μερικές κατηγορίες κλασμάτων μπορούμε να κάνουμε προσεγγιστικούς υπολογισμούς με το νου. Ας συγκρίνουμε με το νου τα κλάσματα $\frac{25}{27}$, $\frac{1}{18}$, και $\frac{17}{36}$.



Λύση

Το κλάσμα $\frac{25}{27}$ εκφράζει έναν αριθμό που είναι **κοντά στο 1**, γιατί ο αριθμητής του είναι περίπου ίσος με τον παρονομαστή του. Το κλάσμα $\frac{1}{18}$ εκφράζει έναν αριθμό που είναι **κοντά στο 0**, γιατί ο αριθμητής του είναι πολύ μικρότερος από τον παρονομαστή του. Το κλάσμα $\frac{17}{36}$ εκφράζει έναν αριθμό που είναι **κοντά στο $\frac{1}{2}$** , γιατί ο αριθμητής του είναι περίπου ίσος με το μισό του παρονομαστή του.

Εφαρμογή 2η Μετατρέπω ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα

Να διατάξετε κατά φθίνουσα σειρά τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$ και $\frac{6}{15}$, αφού τα κάνετε ομώνυμα.

Λύση

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών με ταυτόχρονες διαδοχικές διαιρέσεις: Ε.Κ.Π.(2, 9, 15) = 2 · 3 · 3 · 5 = 90. Κατόπιν διαιρούμε το Ε.Κ.Π. με κάθε παρονομαστή, για να βρούμε με ποιον αριθμό θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε κλάσμα: 90 : 2 = 45, 90 : 9 = 10, 90 : 15 = 6

Πολλαπλασιάζουμε κάθε κλάσμα με τον κατάλληλο αριθμό:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 45}{2 \cdot 45} = \frac{45}{90}, \quad \frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 10}{9 \cdot 10} = \frac{50}{90}, \quad \frac{6}{15} = \frac{6 \cdot 6}{15 \cdot 6} = \frac{36}{90}$$

Απάντηση: Τα αρχικά κλάσματα μετατράπηκαν στα ισοδύναμά τους ομώνυμα και είναι: $\frac{50}{90} > \frac{45}{90} > \frac{36}{90}$ ή τα αρχικά κλάσματα $\frac{5}{9} > \frac{1}{2} > \frac{6}{15}$.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σύγκριση και διάταξη **ομώνυμων** και **ετερώνυμων κλασμάτων**. Δώσε ένα δικό σου παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

❖ $\frac{1}{10} < \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$

Σωστό **Λάθος**

❖ Για να μετατρέψω τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα πολλαπλασιάζω τους όρους τους με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών τους.



Κεφάλαιο 22ο

Σύγκριση – Διάταξη κλασμάτων

Πώς θα μπορούμε στη σειρά;



Άσκηση 1η

Να τοποθετήσεις κατά αύξουσα σειρά τα κλάσματα: $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{4}$ και $\frac{3}{30}$

$$\frac{3}{30} < \frac{3}{25} < \frac{3}{16} < \frac{3}{10} < \frac{3}{7} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4} < \frac{3}{3} < \frac{3}{2}$$

Άσκηση 2η

Συμπλήρωσε το σύμβολο της ισότητας ή της ανισότητας ανάμεσα στα παρακάτω ζευγάρια κλασμάτων, υπολογίζοντας με το νου.

$$\frac{3}{100} < \frac{3}{50}$$

$$\frac{14}{36} < \frac{30}{36}$$

$$\frac{3}{7} < \frac{24}{56}$$

$$\frac{2}{50} < \frac{26}{27}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{48}{50}$$

$$168 = 168$$

Άσκηση 3η

Υπολογίζοντας κατά προσέγγιση με το νου, τοποθέτησε κάθε κλάσμα σε μία από τις τρεις κατηγορίες:

$$\frac{49}{50}, \frac{2}{47}, \frac{14}{30}, \frac{9}{10}, \frac{12}{25}, \frac{4}{9}, \frac{13}{15}, \frac{1}{19}, \frac{89}{100}, \frac{3}{250}$$

Κοντά στο 0	Κοντά στο $\frac{1}{2}$	Κοντά στο 1
○		□

Άσκηση 4η

Να διατάξεις κατά φθίνουσα σειρά τα κλάσματα:

α) $\frac{3}{12}, \frac{6}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{5}{20}, \frac{8}{20}, \frac{2}{20}, \frac{6}{15}, \frac{3}{12}, \frac{1}{10}$

$$\text{ΕΚΠ} (4, 5, 10) = 20$$

β) $\frac{5}{4}, \frac{9}{20}, \frac{2}{5}, \frac{25}{20}, \frac{9}{20}, \frac{8}{20}, \frac{5}{4}, \frac{9}{20}, \frac{2}{5}$

γ) $\frac{1}{8}, \frac{20}{56}, \frac{12}{28}, \text{ΕΚΠ} (8, 56, 28) = 56$

$$\frac{7}{56} < \frac{20}{56} < \frac{24}{56}, \frac{12}{28} > \frac{20}{56} > \frac{1}{8}$$

Πρόβλημα 1ο

Θα προτιμούσες, τα $\frac{4}{8}$ ή τα $\frac{4}{10}$ μιας σοκολάτας; Γιατί; Μπορείς να το εξηγήσεις με κάποιο σχέδιο;

$$\frac{4}{8} > \frac{4}{10}$$

Απάντηση: Όταν οι αριθμητές είναι ίδιοι, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει το μικρότερο παρονομαστή.

Πρόβλημα 2ο

Η Όλγα έδωσε στα δύο παιδιά της το ίδιο ποσό για την εκδρομή του σχολείου. Το ένα παιδί ξόδεψε τα $\frac{2}{5}$ των χρημάτων του και το άλλο τα $\frac{3}{5}$. Ποιο παιδί ξόδεψε περισσότερα χρήματα;



Λύση $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$

Απάντηση: Στα ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.

Πρόβλημα 3ο

Το σχολείο Α ανάρτησε την ανακοίνωση ότι τα $\frac{10}{12}$ των μαθητών του είχαν επιτυχία στην απόκτηση του πτυχίου των αγγλικών και το σχολείο Β ότι τα $\frac{14}{18}$ των μαθητών του είχαν επιτυχία, ενώ το σχολείο Γ αντίστοιχα ανακοίνωσε ότι είχαν επιτυχία τα $\frac{19}{24}$ των μαθητών του. Ποιο από τα τρία σχολεία είχε τη μεγαλύτερη επιτυχία στις εξετάσεις;

Λύση ΕΚΠ (12, 18, 24) = 72
 $\frac{60}{72}$ $\frac{56}{72}$ $\frac{57}{72}$ άρα $\frac{14}{18} < \frac{19}{24} < \frac{10}{12}$



Απάντηση: Μεγαλύτερη επιτυχία είχε το Α σχολείο.

Πρόβλημα 4ο

Σε μια έρευνα για την οικιακή κατανάλωση ρεύματος στην Ελλάδα διαβάζουμε τα εξής: το $\frac{1}{5}$ της ηλεκτρικής ενέργειας καταναλώνεται για φωτισμό, το $\frac{1}{10}$ για ζεστό νερό, τα $\frac{2}{5}$ για μαγείρεμα, τα $\frac{6}{30}$ για κλιματισμό και θέρμανση και τα $\frac{2}{20}$ καταναλώνονται από όλες τις άλλες συσκευές.

Να μετατρέψεις τα κλάσματα σε ομώνυμα, ισοδύναμά τους και να παρουσιάσεις στον κυκλικό δίσκο, που παριστάνει το σύνολο της κατανάλωσης, κάθε κατηγορία με άλλο χρώμα.

Λύση



Απάντηση:

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: «Ο άνθρωπος μοιάζει με κλάσμα...»

Ο συγγραφέας Λέων Τολστόι έγραψε:
 «Ο άνθρωπος μοιάζει με κλάσμα, του οποίου αριθμητής είναι αυτό που είναι πραγματικά, ενώ παρονομαστής είναι εκείνο που νομίζει πως είναι. Όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής τόσο μικρότερο είναι το κλάσμα.»

Τι εννοούσε;

(Eves, H. (1989). *Return to Mathematical Circles*, Βοστώνη: Prindle, Weber and Schmidt)



Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

- Ποιους είχε ως αποδέκτες το μήνυμα του Τολστόι; Μπορούσαν να το καταλάβουν όλοι;
- Τι πίστευε για τη μόρφωση και την καλλιέργεια αυτών των ανθρώπων;
- Ποιος αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος είχε την ίδια άποψη;

