

## Κεφάλαιο 17ο

## Δυνάμεις

### Πολλοί μαζί είμαστε πιο δυνατοί



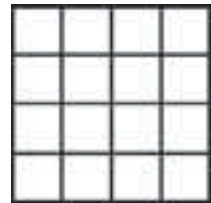
Γνωρίζω την έννοια και τον συμβολισμό της δύναμης ενός αριθμού.  
Διαβάζω και γράφω δυνάμεις.  
Γράφω το γινόμενο ίδιων παραγόντων με δύναμη και αντίστροφα.  
Υπολογίζω τις δυνάμεις ενός αριθμού.



### Δραστηριότητα 1η

Ξέρουμε ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μια σύντομη πρόσθεση με ίδιους προσθετέους.

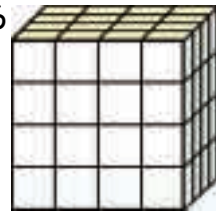
- Υπολόγισε με σύντομο τρόπο πόσα μικρά τετράγωνα υπάρχουν στο διπλανό σχήμα.



- Γράψε την πράξη που έκανες:

$$4 \cdot 4 = 16$$

- Υπολόγισε το πλήθος των μικρών κύβων στην παρακάτω κατασκευή:  $16 \cdot 6 = 96$



- Τι παρατηρείς για τους παράγοντες σε καθεμία από τις προηγούμενες ισότητες;  $4 \cdot 4 = 16$  άρα και  $4 \cdot 4 \cdot 6 = 96$

### Δραστηριότητα 2η

Από τα αρχαία ακόμη χρόνια οι άνθρωποι έδωσαν ιδιαίτερη προσοχή στους πολλαπλασιασμούς στους οποίους όλοι οι παράγοντες ήταν ίδιοι. Στον Πάπυρο του Αχμές (αρχαίο μαθηματικό αιγυπτιακό χειρόγραφο που ο Ριντ μετέφερε στη Βρετανία) διαβάζουμε το παρακάτω πρόβλημα:



Υπάρχουν επτά σπίτια. Σε κάθε σπίτι ζουν επτά γάτες. Κάθε γάτα έφαγε επτά ποντίκια. Κάθε ποντίκι, αν ζούσε, θα έχει φάει επτά στάχια. Κάθε στάχι που φυτεύεται παράγει επτά κούπες σιτάρι. Πόσο περισσότερες κούπες σιτάρι θα παραχθούν χάρη στις γάτες κατά την επόμενη σοδειά ;

- Γράψτε τη διαδικασία που θα ακολουθήσετε για να λύσετε το «πρόβλημα»:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 16.807 \text{ κούπες σιτάρι}$$

- Πιστεύετε ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δάσκαλοι έβαλαν το πρόβλημα αυτό μόνο για να βρεθεί η ποσότητα του σιταριού; .....

Πολλές φορές συναντάμε γινόμενα στα οποία όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι. Αυτά τα γινόμενα είναι δυνατό να εκφραστούν με πιο σύντομο τρόπο.

### Δύναμη φυσικού αριθμού

Ένα γινόμενο με ίδιους παράγοντες μπορεί να γραφεί ως **δύναμη**.

Η δύναμη αποτελείται από δύο αριθμούς: τη **βάση** που είναι ο αριθμός που χρησιμοποιείται ως παράγοντας στο γινόμενο και τον **εκθέτη** που δείχνει πόσες φορές ο αριθμός της βάσης χρησιμοποιείται ως παράγοντας.

### Παραδείγματα

Παράγοντες γινομένου - δύναμη

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

$2^5$

2: βάση

5: εκθέτης

Ο εκθέτης γράφεται με μικρότερο μέγεθος, πάνω και δεξιά από τη βάση. Για παράδειγμα, η δύναμη με βάση το 2 και εκθέτη το 5 γράφεται  $2^5$  και διαβάζεται: **2 στην πέμπτη (δύναμη)**.

Η δύναμη με εκθέτη το 2 διαβάζεται στη δεύτερη ή **στο τετράγωνο** (π.χ.  $5^2$ : 5 στη δεύτερη ή 5 στο τετράγωνο).

Η δύναμη με εκθέτη το 3 διαβάζεται στην τρίτη ή **στον κύβο** (π.χ.  $5^3$ : 5 στην τρίτη ή 5 στον κύβο).

$5^2 = 5 \cdot 5$  (είναι το εμβαδό **τετραγώνου** με πλευρά 5)

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$  (είναι ο όγκος **κύβου** με ακμή 5)

### Εφαρμογή 1η

Να βρείτε το γινόμενο πρώτων παραγόντων του αριθμού 243. Μπορείτε να γράψετε το γινόμενο αυτό με συντομότερο τρόπο;

#### Λύση

Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός ο οποίος διαιρεί τον αριθμό 243. Βρίσκουμε ότι είναι ο αριθμός 3 και αρχίζουμε τη διαδικασία παραγοντοποίησης.

Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, βρίσκουμε το γινόμενο πρώτων παραγόντων

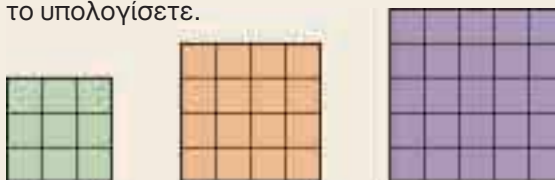
$243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ . Διαπιστώνουμε ότι είναι ένα γινόμενο που αποτελείται από ίδιους παράγοντες. Άρα μπορεί να εκφραστεί με δύναμη.

**Απάντηση:** Ο αριθμός 243 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι:  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$  και με συντομότερο τρόπο είναι:  $3^5$

243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

### Εφαρμογή 2η

Να γράψετε το γινόμενο για τον υπολογισμό του εμβαδού για καθένα από τα παρακάτω τετράγωνα με τη μορφή δύναμης και να το υπολογίσετε.



#### Λύση - Απάντηση:

α)  $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$  τ.εκ., β)  $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$  τ.εκ., γ)  $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$  τ.εκ.

### Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **δύναμη ενός αριθμού**, **βάση** και **εκθέτης**. Εξήγησέ τους με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

❖ Η ισότητα  $6^3 = 6 \cdot 3$  είναι σωστή.

❖ Η ισότητα  $4^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$  είναι σωστή.

❖ Η ισότητα  $4^2 = 16$  είναι σωστή.

**Σωστό**

**Λάθος**








Πολλοί μαζί είμαστε πιο δυνατοί



### Άσκηση 1n

Υπολόγισε τις πρώτες δυνάμεις του αριθμού 2.

$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^6$
$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

### Άσκηση 2n

Συμπλήρωσε τον πίνακα με τα τετράγωνα και τους κύβους των αριθμών:

ΑΡΙΘΜΟΙ ▶	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ΔΥΝΑΜΗ ▼											
ΑΡΙΘΜΟΣ <sup>2</sup>	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
ΑΡΙΘΜΟΣ <sup>3</sup>	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1.000

### Άσκηση 3n

Να βρεις:

- α) Το διπλάσιο και το τετράγωνο του αριθμού 5:  $5 \cdot 2 = 10$  .....  $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$  .....
- β) Το τριπλάσιο και τον κύβο του αριθμού 4: .....  $4 \cdot 3 = 12$  .....  $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$  .....
- γ) Το διπλάσιο και το τετράγωνο του αριθμού 6:  $6 \cdot 2 = 12$  .....  $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$  .....

### Άσκηση 4n

Γράψε με τη μορφή δύναμης τα παρακάτω γινόμενα	Ανάλυσε τους αριθμούς και γράψε τους με τη μορφή δύναμης	
$20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^4$	$625 = 5^4$	$343 = 7^3$
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$	$243 = 3^5$	$169 = 13^2$

### Πρόβλημα 1ο

Πόσο θα κοστίσει η επίπλωση στα τέσσερα νέα τετραώροφα κτίρια που θα στεγάσουν τα γραφεία μιας εταιρείας, όταν κάθε κτίριο έχει τέσσερα γραφεία ανά όροφο και κάθε γραφείο χρειάζεται ένα τραπέζι και τέσσερις καρέκλες; Να εκφράσετε με τη μορφή δύναμης το γινόμενο και να υπολογίσετε το συνολικό κόστος όταν η καρέκλα κοστίζει 60 € και το τραπέζι 80 €.

**Λύση**

- 4 τετραώροφα κτίρια
- 4 γραφεία
- 1 τραπέζι
- 4 καρέκλες
- 1 καρέκλα : 60 ευρώ
- 1 τραπέζι : 80 ευρώ

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$  γραφεία

$64 \cdot 60 \cdot 4 = 15.360$  ευρώ για καρέκλες

$64 \cdot 80 = 5.120$  ευρώ για τραπέζια

**Απάντηση** .....

$15.360 + 5.120 = 20.480$  ευρώ συνολικά



## Πρόβλημα 2ο

Μια εταιρεία καθαρισμού έχει αναλάβει να καθαρίσει τα τζάμια ενός συγκροτήματος πολυκατοικιών. Το συγκρότημα αποτελείται από 6 εξώροφες πολυκατοικίες. Κάθε όροφος έχει 6 διαμερίσματα, κάθε διαμέρισμα έχει 6 παράθυρα και κάθε παράθυρο έχει 6 τζάμια. Να εκφράσετε με τη μορφή δύναμης το γινόμενο και να υπολογίσετε πόσα τζάμια θα καθαρίσουν.

### Λύση

6 εξώροφες πολυκατοικίες  
6 διαμερίσματα  
6 παράθυρα  
6 τζάμια

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7.776 \text{ τζάμια}$$



Χ; τζάμια θα καθαρίσουν ;

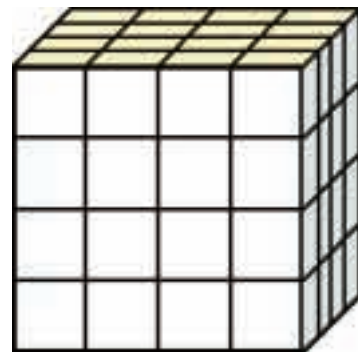
**Απαντήσεις:** Θα καθαρίσουν 7.776 τζάμια.

## Δραστηριότητα με προεκτάσεις: «Το δήλιο πρόβλημα»

Το έτος 430 π.Χ. οι κάτοικοι της Δήλου υπέφεραν από μεγάλο λοιμό (αρρώστια). Για να γλιτώσουν από το λοιμό απευθύνθηκαν για χρησμό στο μαντείο του Απόλλωνα. Σύμφωνα με το χρησμό ο λοιμός θα αντιμετωπιζόταν αν οι πολίτες διπλασίαζαν έναν από τους κυβικούς βωμούς, χωρίς να χαλάσουν την κυβική μορφή του. Τα μοναδικά όργανα που είχαν για να λύσουν το πρόβλημα ήταν ο χάρακας και ο διαβήτης.

Ας εξετάσουμε και εμείς έναν κύβο σαν εκείνο το βωμό.

Παρατηρήστε τον κύβο του παρακάτω σχήματος (που έχει 4 μικρούς κύβους σε κάθε πλευρά), υπολογίστε το πλήθος των μικρών κύβων και γράψτε το σαν δύναμη.....



- Θέλουμε να διπλασιάσουμε τον κύβο. Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά, πόσο θα γίνει το νέο σύνολο των μικρών κύβων;

.....

- Πόσες φορές μεγαλύτερος έγινε τώρα ο κύβος;

.....

- Όμως χρησμός του μαντείου δεν εννοούσε διπλασιασμό της πλευράς, αλλά του όγκου (της ποσότητας των μικρών κύβων που ο βωμός περιέχει). Νομίζετε πως είναι δυνατόν να τον διπλασιάσουμε; (Συζητήστε το στην ομάδα σας).



## Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

- Γιατί το μαντείο έδωσε τέτοιο χρησμό στους κατοίκους της Δήλου;
- Τι μπορούμε να συμπεράνουμε, με βάση το χρησμό, για τις μαθηματικές γνώσεις των ανθρώπων του μαντείου;