

Κεφάλαιο 150

Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών

Δέντρα με αριθμούς

Αναλύω έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
Μαθαίνω τη διαδικασία ανάλυσης με δεντροδιάγραμμα και με διαδοχικές διαιρέσεις.

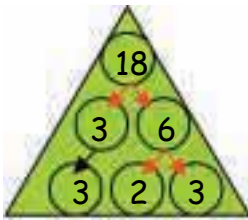


Δραστηριότητα 1η

«Δεντροδιαγράμματα»

Τα παιδιά της Στ' τάξης αναρωτήθηκαν: «Μπορούμε οποιονδήποτε σύνθετο αριθμό να τον εκφράσουμε ως γινόμενο πρώτων αριθμών;» Ας πάρουμε για παράδειγμα τον αριθμό 18:

- Γράψε στο διπλανό «δέντρο» το 18 ως γινόμενο δύο παραγόντων :
- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε πρώτους παράγοντες:



- Θα μπορούσες να ξεκινήσεις (πάλι από το 18) με άλλους παράγοντες;
- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε πρώτους παράγοντες.
- Τι παρατηρείς για το τελικό γινόμενο στα δύο δέντρα;



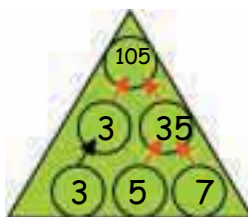
$3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ και με τους δύο τρόπους είναι το ίδιο.

Δραστηριότητα 2η

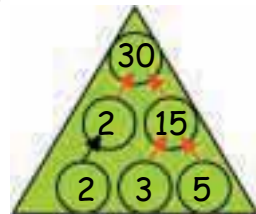
Από την προηγούμενη δραστηριότητα τα παιδιά κατάλαβαν ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι το «κατασκευαστικό» υλικό για να φτιαχτούν όλοι οι σύνθετοι αριθμοί. Άρα κάθε σύνθετος αριθμός είναι φτιαγμένος από έναν μοναδικό συνδυασμό πρώτων αριθμών. Σκέφτηκαν να τους παρομοιάσουν με τα παιδικά τουβλάκια και να δοκιμάσουν τώρα να παράγουν δέντρα με αριθμούς ξεκινώντας από τα κάτω κλαδιά προς τα πάνω.



- Γράψε στα κάτω κλαδιά του διπλανού «δέντρου» ένα συνδυασμό από 3 πρώτους παράγοντες (ίδιους ή διαφορετικούς).
- Ανεβαίνοντας στο πιο πάνω «κλαδί» να κάνεις τον πολλαπλασιασμό ανάμεσα στους δύο παράγοντες και να μεταφέρεις τον τρίτο όπως είναι.
- Στο τελευταίο κλαδί να κάνεις και τον άλλο πολλαπλασιασμό.



- Δοκίμασε τώρα με άλλους πρώτους παράγοντες.
- Συνέχισε κάνοντας τον πρώτο πολλαπλασιασμό ανάμεσα στους δύο και μετάφερε τον τρίτο.
- Κάνε τον τελευταίο πολλαπλασιασμό. Η διαδικασία παραγωγής του αριθμού ολοκληρώθηκε.



Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στο συμπέρασμα:

Γινόμενο πρώτων παραγόντων

Ένας σύνθετος αριθμός μπορεί να εκφραστεί και ως γινόμενο πρώτων αριθμών (**γινόμενο πρώτων παραγόντων**).

Η σειρά των διαιρέσεων δεν παίζει κανένα ρόλο, γιατί κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μόνο κατά έναν τρόπο.

Παραδείγματα

Ο αριθμός 10, μπορεί να εκφραστεί και ως $2 \cdot 5$.

$$12 = 2 \cdot 6 \quad 12 = 3 \cdot 4$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad = 3 \cdot 2 \cdot 2$$

Για να αναλύσουμε έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, μπορούμε να εργαστούμε με δέντροδιάγραμμα ή διαδοχικές διαιρέσεις.



Εφαρμογή 1η

Να εκφράσετε τον αριθμό 60 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με δέντροδιάγραμμα.

Λύση

- Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 60. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Επομένως, γράφουμε το γινόμενο $2 \cdot 30$.
- Από κάτω, αφού γράψουμε ξανά τον πρώτο παράγοντα (το 2), συνεχίζουμε αναλύοντας με τον ίδιο τρόπο το 30. Διαιρείται με το 2 και έτσι γράφουμε το γινόμενο $2 \cdot 15$.
- Γράφουμε ξανά τους πρώτους παράγοντες όπως είναι ($2 \cdot 2$) και συνεχίζουμε αναλύοντας το 15. Δεν διαιρείται με το 2 και έτσι εξετάζουμε αν διαιρείται με το 3. Διαιρείται και έτσι γράφουμε το γινόμενο $3 \cdot 5$.



Η ανάλυση τελειώνει, γιατί όλοι οι παράγοντες είναι πρώτοι αριθμοί.

Απάντηση: Το 60 εκφράζεται ως $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Εφαρμογή 2η

Να εκφράσετε τον αριθμό 90 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με διαδοχικές διαιρέσεις.

Λύση

- Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 90. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Έτσι τον διαιρούμε και γράφουμε από κάτω το πηλίκο, που είναι 45.
- Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για το 45. Διαιρούμε με το 3 και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 15.
- Διαιρούμε το 15 με το 3, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 5.
- Διαιρούμε με το 5, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 1.

90	2
45	3
15	3
5	5
1	1

Η ανάλυση τελειώνει, γιατί το τελευταίο πηλίκο είναι το 1.

Απάντηση: Ο αριθμός 90 εκφράζεται ως $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **ανάλυση σύνθετου αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Εξήγησέ τον με ένα δικό σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό **Λάθος**

❖ Όλοι οι σύνθετοι αριθμοί μπορούν να γραφούν ως γινόμενα των πρώτων παραγόντων 2 και 3.

❖ Πρέπει να βάζουμε τους παράγοντες με μια συγκεκριμένη σειρά.

❖ Είναι σωστή η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.



Κεφάλαιο 15ο

Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών



Δέντρα με αριθμούς

Άσκηση 1n

Κύκλωσε στη στήλη κάτω από κάθε σύνθετο αριθμό τη **σωστή ανάλυση** του σε πρώτους παράγοντες:

36	63	67	70	78	84	91
<u>2 · 2 · 3 · 3</u>	2 · 3 · 21	<u>1 · 67</u>	7 · 10	2 · 2 · 3 · 7	7 · 12	1 · 91
2 · 3 · 3 · 3	7 · 9	3 · 17	5 · 14	<u>2 · 3 · 13</u>	4 · 21	3 · 29
2 · 18	3 · 21	3 · 19	<u>2 · 5 · 7</u>	2 · 3 · 17	2 · 2 · 3 · 3 · 7	<u>7 · 13</u>
3 · 12	<u>3 · 3 · 7</u>	7 · 19	2 · 2 · 5 · 7	2 · 39	<u>2 · 2 · 3 · 7</u>	13 · 17

Άσκηση 2n

Υπολόγισε με το νου και γράψε κάθε αριθμό ως γινόμενο **πρώτων** παραγόντων:

10: 2 · 5	30: 2 · 3 · 5	50: 2 · 5 · 5	70: 2 · 5 · 7
20: 2 · 2 · 5	40: 2 · 2 · 2 · 5	60: 2 · 2 · 3 · 5	80: 2 · 2 · 2 · 2 · 5

Άσκηση 3n

Συνέχισε το «δεντροδιάγραμμα» και γράψε μετά για κάθε αριθμό την ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

210 21 10 3 · 7 2 · 5	350 35 10 5 · 7 2 · 5	730 73 10 73 2 · 5
-----------------------------	-----------------------------	--------------------------

210 = 2 · 3 · 5 · 7 350 = 2 · 5 · 5 · 7 730 = 2 · 5 · 73

Άσκηση 4n

Ανέλυσε τους παρακάτω σύνθετους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων και γράψε μετά για κάθε αριθμό την ανάλυσή του:

96	2	405	5	675	5	291	3	87	3
48	2	81	3	135	5	97	97	29	29
24	2	27	3	27	3	1		1	
12	2	9	3	9	3				
6	2	3	3	3	3				
3	3	1		1					
1									

96 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 3 405 = 3 · 3 · 3 · 3 · 5 675 = 3 · 3 · 3 · 5 · 5 291 = 3 · 97 87 = 3 · 29



Πρόβλημα 1ο

Αν γράψουμε το 100 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων, πόσα 2 και πόσα 5 θα υπάρχουν στο γινόμενο; (βρες τη λύση με ανάλυση ή με το νου)

Λύση

100 γινόμενο πρώτων παραγόντων
X : 2 και X : 5 υπάρχουν :

$$\begin{array}{r|l}
 100 & 2 \\
 50 & 2 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad 100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Απάντηση: Έχει δύο 2 και δύο 5.



Πρόβλημα 2ο

Το 11 είναι παράγοντας του αριθμού 2.310. Ποιους άλλους παράγοντες έχει ο αριθμός αυτός;

Λύση

$$\begin{array}{r}
 2.310 \\
 11 \quad 210 \\
 3 \cdot 70 \\
 7 \cdot 10
 \end{array}
 \quad 2.310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

Απάντηση:2...5.....

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: «Αφίσα με τους 24 πρώτους αριθμούς»

Τα παιδιά θέλησαν να φτιάξουν μια αφίσα με τους 24 πρώτους αριθμούς. Το μέγεθος της αφίσας συμφωνήθηκε να είναι 6 x 4 σελίδες φωτοτυπικού χαρτιού. Χωρίστηκαν σε 3 ομάδες (ροζ, πορτοκαλί, γαλάζια). Κάθε ομάδα χωρίστηκε σε 2 υπο-ομάδες που η καθεμία θα ετοίμαζε ένα κομμάτι 2 x 2 σελίδων. Όταν συναντήθηκαν για να συναρμολογήσουν το έργο τους, υπήρχαν 3 ομαδικά έργα. Κάθε έργο αποτελούνταν από 2 μέρη, με κάθε μέρος να αποτελείται από 4 σελίδες. Στο σχέδιο φαίνεται το τελικό συναρμολογημένο έργο. Χρησιμοποιώντας μόνο πρώτους αριθμούς (ως παράγοντες) απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

- Πόσες σελίδες καλύπτει το καθένα από τα δύο μέρη της μιας ομάδας; (Να το γράψετε ως γινόμενο παραγόντων.)

.....

- Πόσες σελίδες καλύπτει το συνολικό έργο κάθε ομάδας; (Να το γράψετε ως γινόμενο παραγόντων.)

.....

- Πόσες σελίδες καλύπτει το συνολικό έργο και των τριών ομάδων; (Να το γράψετε ως γινόμενο παραγόντων και να βρείτε το γινόμενο.)

.....

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να βρούμε το συνολικό αριθμό των σελίδων της αφίσας;

.....

2	3	23	29	59	61
5	7	31	37	67	71
11	13	41	43	73	79
17	19	47	53	83	89

Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

- Ποιος είναι ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός που έχει ανακαλυφθεί μέχρι σήμερα; Αναζητήστε πληροφορίες στο Διαδίκτυο ψάχνοντας τις λέξεις «prime numbers».
- Ποιοι ήταν οι γνωστοί μαθηματικοί που ασχολήθηκαν με τους πρώτους αριθμούς;
- Γιατί ο Ερατοσθένης σταμάτησε το «κόσκινο» στο 100 και δεν το προχώρησε για παράδειγμα ως το 1000;