

Κεφάλαιο 14ο

Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί



Είμασθε και οι πρώτοι!

Γνωρίζω τους πρώτους και τους σύνθετους αριθμούς.

Μαθαίνω τι είναι το «κόσκινο του Ερατοσθένη».

Διακρίνω αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος με τα κριτήρια διαιρετότητας.



Δραστηριότητα 1η

Στο Δημοτικό Σχολείο Σύμης, τα παιδιά της ΣΤ΄ τάξης, μετά το μάθημα για τους διαιρέτες των αριθμών και τα κριτήρια διαιρετότητας, αποφάσισαν να παίξουν ένα παιχνίδι. Το ονόμασαν «δεν μπαίνω σε σειρές» και αναρωτήθηκαν: «Πόσα παιδιά πρέπει να έχει μια τάξη ώστε να μην μπορούν να παραταχθούν σε σειρές χωρίς να περισσεύει έστω και ένα παιδί;»

Ποιο κριτήριο δεν πρέπει να ικανοποιεί ο αριθμός που ψάχνουν για να μην μπορούν να παραταχθούν σε:

- **Δυάδες:** Ο αριθμός πρέπει να είναι μονός.
- **Τριάδες:** Το άθροισμα των ψηφίων του να μην είναι πολλαπλάσιο του 3.
- **Τετράδες:** Τα δύο τελευταία ψηφία του να μην διαιρούνται με το 4.
- **Πεντάδες:** Να μην τελειώνει σε 0 ή 5.
- Μπορείς τώρα να βρεις τους πιθανούς αριθμούς μαθητών που φαντάστηκαν τα παιδιά; (Μια τάξη έχει μέχρι 30 μαθητές.)
1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.



- Τι παρατηρείς για τους διαιρέτες αυτών των αριθμών;
Διαιρούνται μόνο με το 1 και τον εαυτό τους.

Δραστηριότητα 2η

«Το κόσκινο του Ερατοσθένη»

Ο Ερατοσθένης, σπουδαίος Έλληνας μαθηματικός και φιλόσοφος, γεννήθηκε περίπου το 275 π.Χ. Ήταν ο πρώτος που υπολόγισε τη διάμετρο της Γης με ακρίβεια. Δυστυχώς σώζονται ελάχιστες από τις μελέτες του.

Ο διπλάνος πίνακας είναι μία επινόησή του, για να ξεχωρίζει τους αριθμούς που έχουν μόνο 2 διαιρέτες από τους υπόλοιπους.

Για να τους ξεχωρίσεις κι εσύ, να διαγράψεις:

- τον αριθμό 1.
- τα πολλαπλάσια του 2, εκτός από το 2.
- τα πολλαπλάσια του 3, εκτός από το 3.
- τα πολλαπλάσια του 5, εκτός από το 5.
- τα πολλαπλάσια του 7, εκτός από το 7.
- Βάλε σε έναν κύκλο τους αριθμούς που απέμειναν.
- Πόσοι έμειναν; 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Από την αρχαιότητα ακόμη οι αριθμοί αποτελούσαν πρόκληση για μελέτη. Το 300 π.Χ. ο Ευκλείδης ήταν από τους πρώτους που μελέτησαν τους αριθμούς σε σχέση με τους διαιρέτες τους και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες.

Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Ένας αριθμός, μεγαλύτερος από το 1, που έχει μόνο **δύο διαιρέτες** (το 1 και τον εαυτό του) λέγεται **πρώτος**.

Ένας αριθμός που έχει τουλάχιστον **τρεις διαιρέτες** λέγεται **σύνθετος**.

Παραδείγματα

Ο αριθμός 2, έχει για διαιρέτες μόνο το 1 και το 2.

Ο αριθμός 4, έχει για διαιρέτες το 1, το 2 και το 4.

Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος (έχει μόνο **έναν διαιρέτη**, τον εαυτό του).



Εφαρμογή 1η

Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 101 έως 110 είναι πρώτοι αριθμοί.

Λύση

101 ~~102~~ 103 ~~104~~ ~~105~~ ~~106~~ 107 ~~108~~ 109 ~~110~~

Πρώτα διαγράφω τους άρτιους αριθμούς (διαιρούνται με το 2). Μετά το 105 (που διαιρείται με το 3). Κανένας από τους υπόλοιπους αριθμούς δεν διαιρείται με το 5 σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας. Δοκιμάζω, όπως ο Ερατοσθένης, και με το 7 και διαπιστώνω ότι δεν διαιρούνται ούτε μ' αυτό. **Πρέπει να δοκιμάσω όμως αν διαιρούνται με κάποιον από τους υπόλοιπους πρώτους αριθμούς μέχρι το 100.**

Απάντηση: Πρώτοι είναι οι αριθμοί 101, 103, 107 και 109.

Σύνθετοι είναι οι αριθμοί 102, 104, 105, 106, 108 και 110.



Εφαρμογή 2η

Το Στ'1 έχει 23 μαθητές και το Στ'2 έχει 24. Ο γυμναστής θέλει να χωρίσει κάθε τμήμα σε ίσες ομάδες. Σε ποιο τμήμα θα δυσκολευτεί και γιατί; Στο άλλο τμήμα πόσοι είναι οι πιθανοί συνδυασμοί που μπορεί να κάνει;

Λύση- Απάντηση

Το Στ'1 δεν μπορεί να χωριστεί σε ομάδες χωρίς να περισσεύει κανένα παιδί, γιατί το 23 δεν έχει άλλους διαιρέτες εκτός από το 1 και το 23 (είναι πρώτος αριθμός). Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να το «παράγουμε» παρά μόνο με τον πολλαπλασιασμό $1 \cdot 23$.

Το Στ'2 μπορεί να χωριστεί με πολλούς τρόπους, γιατί το 24 έχει πολλούς διαιρέτες (είναι σύνθετος αριθμός).

Πιθανοί συνδυασμοί είναι:

12 ομάδες από ... 2 ... παιδιά κάθε ομάδα	$(12 \cdot 2 = 24)$
2 ομάδες από ... 12 ... παιδιά κάθε ομάδα	$(2 \cdot 12 = 24)$
3 ομάδες από ... 8 ... παιδιά κάθε ομάδα	$(3 \cdot 8 = 24)$
8 ομάδες από ... 3 ... παιδιά κάθε ομάδα	$(8 \cdot 3 = 24)$
4 ομάδες από ... 6 ... παιδιά κάθε ομάδα	$(4 \cdot 6 = 24)$
6 ομάδες από ... 4 ... παιδιά κάθε ομάδα	$(6 \cdot 4 = 24)$
24 ομάδες από ... 1 ... παιδιά κάθε ομάδα	$(24 \cdot 1 = 24)$

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **πρώτος** και **σύνθετος αριθμός**.

Εξήγησέ τους με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

❖ Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός ζυγός αριθμός που είναι πρώτος.

❖ Με το «κόσκινο του Ερατοσθένη» βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς.

Σωστό **Λάθος**



Κεφάλαιο 14ο

Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Είμαστε και οι πρώτοι!



Άσκηση 1n

Βρες αν οι παρακάτω αριθμοί είναι πρώτοι ή σύνθετοι. Εξέτασε πρώτα σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας των αριθμών 2, 3 και 5 ή κάνε τη διαίρεση με το 7. Πόσους διαιρέτες χρειάζεται να βρεις για έναν αριθμό προκειμένου να τον κατατάξεις στους σύνθετους;

ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ▶	100	181	224	263	285	311	411
ΑΡΙΘΜΟΙ ▼							
2	50		112				
3					95		137
5	20				57		
7			32				

- Γράψε τους πρώτους : 181, 263, 311
- Γράψε τους σύνθετους : 100, 224, 285, 411

Άσκηση 2n

Γράψε καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς ως γινόμενο δύο παραγόντων:

10: 2 . 5	35: 5 . 7	48: 6 . 8	54: 6 . 9
63: 7 . 9	72: 8 . 9	81: 9 . 9	93: 3 . 31

Άσκηση 3n

- α) Γράψε 10 πρώτους αριθμούς: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
- β) Γράψε 10 σύνθετους αριθμούς: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18

Πρόβλημα 1ο

Ένας δάσκαλος, όταν ρωτήθηκε πόσων χρονών ήταν, απάντησε: «Η ηλικία μου σε χρόνια είναι πρώτος αριθμός αλλά, αν αντιστραφούν τα ψηφία, διαιρείται με το 5 και ελπίζω να ζήσω τόσα χρόνια!». Πόσων ετών είναι ο δάσκαλος;

23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67.

Λύση

πρώτος αριθμός

αν αντιστραφούν τα ψηφία διαιρείται με το 5
X : ετών είναι ο δάσκαλος ;

Αν αντιστραφεί θα γίνει 95, το οποίο διαιρείται με το 5.

Απάντηση: Ο δάσκαλος είναι 59 ετών.



Πρόβλημα 2ο

Ποιο είναι το μεγαλύτερο πιθανό γινόμενο δύο πρώτων αριθμών από τους οποίους ο καθένας είναι μικρότερος από το 100; Το γινόμενο που θα προκύψει είναι πρώτος αριθμός;

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,
29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59,
61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
89 . 97 = 8.633

Λύση

μεγαλύτερο πιθανό

γινόμενο δύο πρώτων.

Το γινόμενο είναι πρώτος αριθμός.

Ποιος είναι ο αριθμός ;

Απάντηση: Το γινόμενο που θα προκύψει δεν είναι πρώτος αριθμός.



Πρόβλημα 3ο

Χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 1 έως 9, μία φορά τον καθένα, τοποθετήστε αυτούς που λείπουν στα κελιά του τετραγώνου που ακολουθεί, έτσι ώστε οι αριθμοί, όταν προσθέτονται σε κάθε σειρά ή σε κάθε στήλη, να έχουν άθροισμα έναν πρώτο αριθμό. (π.χ. στην πρώτη σειρά το άθροισμα να είναι ίσο με 13).

Πόσες διαφορετικές λύσεις μπορείτε να βρείτε;

2	8	3	13
6	4	9	19
5	1	7	13
13	13	19	

5 7 1

13 19 13

Απάντηση:

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: «Μυστικοί κώδικες και κρυπτογραφία»

Ο Ιούλιος Καίσαρας επινόησε έναν απλό κρυπτογραφικό κώδικα προκειμένου να επικοινωνεί με τους στρατηγούς του με μηνύματα που δεν θα ήταν δυνατόν να τα διαβάσουν οι εχθροί του. Ο κώδικας βασιζόταν στην αντικατάσταση κάθε γράμματος του αλφαβήτου με κάποιο άλλο, όχι όμως επιλεγμένο τυχαία αλλά με βάση έναν μυστικό αριθμό. Πολλοί σύγχρονοι κρυπτογραφικοί κώδικες είναι βασισμένοι σε έναν ή σε γινόμενο από πρώτους αριθμούς. Η τεχνική της κωδικοποίησης είναι απλή. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Κοιτάξτε στον ακόλουθο πίνακα το ελληνικό αλφάβητο. Στην πράσινη γραμμή εμφανίζεται όπως το γνωρίζουμε και το χρησιμοποιούμε. Στην καφετιά γραμμή μετατοπίσαμε τα γράμματα κατά 3 θέσεις προς τα δεξιά. Έτσι το Α έγινε Χ, το Β έγινε Ψ κ.λπ. (Αυτή είναι η κωδικοποίηση 3Δ, δηλαδή 3 θέσεις δεξιά).

A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	P	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω
Χ	Ψ	Ω	A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	P	Σ	T	Y	Φ

Με την κωδικοποίηση (3Δ), αντί να γράψουμε Α, γράφουμε Χ, αντί του Β γράφουμε Ψ κ.λπ. Για παράδειγμα, η λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ θα γίνει ΙΧΕΔΙΧΠΖΗΧ

Με το γινόμενο ποιων πρώτων αριθμών η κωδικοποίηση της λέξης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ γίνεται ΠΕΜΛΠΕΨΝΞΕ;

Δημιουργήστε μια δική σας κωδικοποίηση πολλαπλασιάζοντας πρώτους αριθμούς μεταξύ τους και γράψτε τα ονόματά σας κωδικοποιημένα. Μετά ανταλλάξτε τα ονόματά σας με τα ονόματα κάποιας άλλης ομάδας και προσπαθήστε να βρείτε την κωδικοποίηση.



Μπορείτε να εξηγήσετε τι δείχνει το σχέδιο;

Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

- Ποιες ανάγκες έκαναν τους ανθρώπους να επινοήσουν την κρυπτογραφία;
- Χρησιμοποιείται η κρυπτογραφία σήμερα;
- Εφαρμόζεται η κρυπτογραφία στους αριθμούς;